d次元ガスケット上のself-avoiding pathのくりこみ群解析(基研研究会 確率モデルの統計力学,研究会報告)

服部, 哲弥

d 次元ガスケット上の self-avoiding path のくりこみ群解析

名古屋大学 多元（2004年2月より東北大学 理学部）　服部 哲弥 [1]

1 動機と目的.

くりこみ群とは,「精度のスケール変換（細かい構造をならしたり付け加えたりする操作）」に対する元の系（本稿では path 上の測度）の応答を適当なパラメータ空間の上で記述した力学系であって，その固定点近傍の振る舞いが系の漸近的性質を定めるものを言う．初期値に対応する部分集合 (canonical surface) から系の漸近的性質を定める固定点 (fixed point) 近傍までの大局的な軌道（臨界軌道）がすなおな場合にくりこみ群は有効である．くりこみ群力学系においてはスケール変換の方向に対応する不安定な方向が一つあって残りの方向が安定方向であるような双曲型固定点が念頭にある．初期値を臨界軌道上から少しずらすと軌道の漸近的な振る舞いは臨界軌道と大きく異なるが，固定点近傍に長くとどまることから，固定点近傍の力学系の振る舞いから元の系の漸近的性質についての情報を得られる，というのが，理論物理学におけるくりこみ群の描像である．

理論物理学では，スピン系の平衡系統計力学における臨界現象の分析，特に臨界指数の決定，および，その連続極限としての場の量子論の分析に関して大きな成功を収めてきた．くりこみ群は本質的な描像であり，数学的にも深い意味があると考える研究者は多いと思うが，その深さを尽くした数学的一般論としてのくりこみ群はまだない，というのが筆者の立場である．たとえば，固定点近傍で線形化した力学系の考察を行う解析はあるが，canonical surface は一般には固定点から離れていて固定点近傍までの大局的な軌道がすなおであることを言わなければ固定点近傍の解析結果を元の系の性質に翻訳できない．力学系にはカオスという現象がよく知られていて，大局的な軌道の統一的な解析は一般に極めて難しい．くりこみ群の数学と言うためには，大局的な軌道がすなおである，という期待の数学的由来を明らかにすることが必要である [1, 前書き].

自分自身の軌跡が交わることを禁止した self-avoiding path については，低次元の格子空間では単純ランダムウォークと比較すると極めて弱い性質しか知られていない．Self-avoiding path には単純ランダムウォークと違ってマルコフ性がないからである．本稿で紹介する d 次元 pre-gasket 上の self-avoiding path についても事情は同様である．(d 次元 pre-gasket とは，Sierpiński gasket と呼ばれる有名なフラクタルの単位構造より細かい構造を消し去ったフラクタル格子を次元について一般化したものである.）一方，d 次元 pre-gasket 上の self-avoiding path のくりこみ群は格子空間の場合と違って有限次元空間の上の力学系になるので，くりこみ群に期待される普遍的な数

[1] E-mail: hattori@math.nagoya-u.ac.jp

学的内容を研究する基礎的な例題になりうる．d 次元 pre-gasket 上の単純ランダムウォークもくりこみ群が有限次元になるが，マルコフ性や関連する調和関数などの解析的手法が適用可能である．さらに，d 次元 pre-gasket は格子空間にたとえれば低次元の（ある意味で 1 次元と 2 次元の間に相当する）空間なので，単純ランダムウォークと self-avoiding path は全く違う漸近的性質を示すことが予想され，分かっている場合についてはそのようになっている．ランダムウォークの性質を用いることができないので，いわば「手足を縛る」ことでくりこみ群固有の「威力」を調べるのに有効である．

くりこみ群の視点からは，ここで扱う対象に対応する初期値 (canonical surface) は固定点から離れているため，くりこみ群の大局的な軌道解析の例になる．d を決める毎に d 次元 pre-gasket 上の self-avoiding path を具体的に調べることは原理的に可能だが，d によらない，即ち，個々の図形を越えたくりこみ群の大局的な軌道解析の一般論は見いだされていない．

以上のように，d 次元 pre-gasket 上の self-avoiding path という問題はくりこみ群の重要な問題を内包する基礎的な問題として，また既存の解析方法が使えない状況でくりこみ群の解析手段としての力を試す場として，検討する価値があると考える．以下，[1, §6] に従って，[4, 2, 6, 5, 7, 8] の結果のあらすじを概説する．本稿の詳しい内容や定理の証明等は [1] を参照して頂きたい．

2 Pre-d 次元 gasket 上の self-avoiding path.

Pre-d 次元 gasket. フラクタルは無限に細かい構造を持つ．これに対して，0 でない最小単位の構造（線分の長さの最小単位）で微細構造を打ち切った図形を（業界用語で申し訳ないが）フラクタル前駆図形という気持ちでプレフラクタルと呼ぶことにする．

d を 2 以上の自然数とする．正三角形や正三角錐のように，$\mathbb{R}^d$ の中の $d+1$ 個の点がどの 2 点も距離 1 だけ離れているとき，これらの全ての点の組を結んでできる図形を d 次元単体という．F_0 を d 次元単体で一つの頂点が $\mathbb{R}^d$ の原点 O であるものとし，残りの頂点を $v_1, v_2, \cdots, v_d$ とする．F_0 と合同な図形を d 個持ってきて v_i のところでつなぎ，またおたがいどうしもうまくつないで，1 辺の長さが 2 の d 次元単体を作ることができる．これを F_1 とおく．以下，$n=1,2,3,\cdots$ に対して帰納的に F_{n-1} と合同な図形を $d+1$ 個集めて 1 辺の長さが 2^n の d 次元単体に収まるようにつなぐことで帰納的に F_n が定義できる：$F_n = F_{n-1} \cup \bigcup_{i=1}^{d} (F_{n-1} + 2^{n-1} v_i)$, $n=1,2,\cdots$. ここで $A \subset \mathbb{R}^2$ と $x \in \mathbb{R}^2$ に対して $A + x = \{y + x \mid y \in A\}$ と書いた．また，$x \in \mathbb{R}^2$ に対して x の定数倍は線形空間としての定数倍の意味である．たとえば F_n の最も外側の頂点は O と $2^n v_i$, $i = 1, \cdots d$ である．$F = \bigcup_n F_n$ を d 次元 pre-Sierpiński gasket と呼び，ここだけの記号で dSG と略記することにする．

dSG 上の path を考えるときはネットワークとしての構造しか見ない．そこで，F_n の中の単位単体を構成する単位線分を F_n の辺と呼び，F_n の辺を全て集めた集合を B_n とおく．また，F_n の中の単位単体の頂点を F_n の頂点と呼び，F_n の頂点を全て集めた集合を G_n とおく．そして

dSG を $G = \bigcup_n G_n$ を頂点の集合，$B = \bigcup_n B_n$ を辺の集合とするネットワーク $F = (G, B)$ ともみることにする．

Pre-d 次元 gasket 上の self-avoiding path. 出発点が原点 O で，F の頂点 G をたどる k 歩の path を全て集めた集合を $\tilde{\Omega}_k$ とおき，さらに，そのうちで self-avoiding なものを全て集めた集合を $\tilde{\Omega}'_k$ とおく．即ち，$w \in \tilde{\Omega}_k$（w が k 歩の path）であるとは，写像 $w : \{0, 1, 2, \cdots, k\} \to G$ であって，$w(0) = O$ および，1 歩 1 歩が F の辺であること，$\overline{w(i)w(i+1)} \in B$, $i = 0, 2, \cdots, k-1$, を言う．長さ無限の path も考えて，その集合を $\tilde{\Omega}$ とする．次に $w \in \tilde{\Omega}'_k$ であるとは，$w \in \tilde{\Omega}_k$ であって，self-avoiding 性 $w(i) \neq w(j)$, $0 \leqq i < j \leqq k$, を満たすものを言う．同様に $\tilde{\Omega}'$ を無限長の self-avoiding path の集合とし，有限長または無限長の self-avoiding path の集合を $\Omega_0 = \tilde{\Omega}' \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{\Omega}'_k$ とおく．最後に，F 上の path $w \in \tilde{\Omega} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_k$ に対してその長さを $L(w)$ と書く．

Pre-Sierpiński gasket や d 次元 pre-gasket (dSG) 上の self-avoiding path の平均的な（あるいは典型的な）漸近的性質（長さが長いときの振る舞い）を調べる．平均的な性質を云々するためには path の集合上の確率測度を与える必要がある．ここでは，単純に，長さ k の self-avoiding path の集合 $\tilde{\Omega}'_k$ 上に一様分布を与えて，各 k 毎にこの一様分布についての性質（即ち，path に関する単純平均）を考えてその $k \to \infty$ での漸近的性質を調べる．(ここでは変位の指数に焦点を絞る.)

dSG 上の self-avoiding path の変位の指数については，$d = 2, 3$ の場合しか解決していない．

定理 1 ([4, 6, 5]) $\lambda_2 = \frac{1}{2}(7 - \sqrt{5})$ に対して $\nu = \nu_2 = \frac{\log 2}{\log \lambda_2}$ *(= 0.7986⋯)* とおくと，*pre-Sierpiński gasket* 上の長さ k の *self-avoiding path* の集合 $\tilde{\Omega}'_k$ 上の一様分布に関する期待値を E_k と書くとき，変位の指数は次の意味で ν である：$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log \mathrm{E}_k[\,|w(k)|^s\,] = s\nu$, $s \geqq 0$. 同様に，$2 < \lambda_3 < 3$ なる定数が存在して，$\nu = \nu_3 = \frac{\log 2}{\log \lambda_3}$ *(=0.6740⋯)* とおくと，変位の指数は上と同様の意味で ν である．

問題をくりこみ群そのものの解析と，その結果を元の問題，即ち path の漸近的性質，へ適用することという二つの部分に分けるとき，定理 1 が $d \geqq 4$ で未解決というのは，前者の，くりこみ群の軌道解析が未解決という意味である．後者の，くりこみ群解析の結果を元の問題に適用する部分は一般論が分かっている [7, 8]．この結果を述べるためには，dSG 上の self-avoiding path のくりこみ群の定式化を必要とする．

3 Pre-d 次元 gasket 上の self-avoiding path のくりこみ群.

Pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path のくりこみ群. F_n 上の「自然な」self-avoiding path の集合の列（仮に $\Omega_n \subset \Omega_0$ としよう）を選び，長さ L の母関数 $\Phi_n(z) = \sum_{w \in \Omega_n} z^{L(w)}$ (?) を定義して，その n についての漸化式を考えたい．しかし，1 変数だけでは n についての漸化式は閉じない．

Pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path が F の一つの単位正三角形を通る通り方は 1 歩で通り抜けるか 2 歩で通り抜けるかの 2 通りある．そこで，self-avoiding path $w \in \Omega_0$ に対して，w が通る単位三角形のうち 1 歩で通ったものの個数を $s_{(1)}(w)$，2 歩で通ったものの個数を $s_{(2)}(w)$，とおく．まとめて書くときは，添字の集合 $\mathcal{I}_2 = \{(1),(2)\}$ を用意して $s_I(w)$, $I \in \mathcal{I}_2$, と書くことにする．Path の長さ（総歩数）との関係は

$$L = s_{(1)} + 2s_{(2)} = \sum_{I \in \mathcal{I}_2} |I| s_I \,. \tag{1}$$

ここで，添字 I に対応する単位三角形の中での path の歩数を $|I|$ と書いた．

パラメータ空間を 2 次元としたのに対応して，各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して F_n 上の self-avoiding path の集合も 2 種類に分類する必要がある．くりこみ群にとって自然な path は，原点 O から F_n のいちばん外側の頂点 $2^n v_1$ までの self-avoiding path であり，残りの外側の頂点 $2^n v_2$ を通るか通らないかで分類するのが適当である．O から $2^n v_2$ を通らずに $2^n v_1$ に達する F_n 上の self-avoiding path の集合を $\Omega^{(n)}_{(1)}$，途中で $2^n v_2$ をとおるものの集合を $\Omega^{(n)}_{(2)}$ とおく．

$n \in \mathbb{Z}_+$ と $I \in \mathcal{I}_2$ に対して

$$X_{n,I}(\mathbf{z}) = \sum_{w \in \Omega_I^{(n)}} \prod_{J \in \mathcal{I}_2} z_J^{s_J(w)} = \sum_{w \in \Omega_I^{(n)}} z_{(1)}^{s_{(1)}(w)} z_{(2)}^{s_{(2)}(w)}, \quad \mathbf{z} = (z_{(1)}, z_{(2)}) \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_2}, \tag{2}$$

によって $\mathbf{X}_n = (X_{n,I},\ I \in \mathcal{I}_2) = (X_{n,(1)}, X_{n,(2)}) : \ \mathbb{C}^{\mathcal{I}_2} \to \mathbb{C}^{\mathcal{I}_2}$ を定義する．

命題 2 (Pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path のくりこみ群) $\mathbf{\Phi} = \mathbf{X}_1$ とおくとき，*(2)* で定義された $\mathbf{X}_n = (X_{n,(1)}, X_{n,(2)})$, $n = 0,1,2,\cdots$, は $\mathbf{X}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ と漸化式 $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{\Phi} \circ \mathbf{X}_n$, $n = 0,1,2,\cdots$, で定まる．

証明は [1] を参照．命題 2 の漸化式が定める $\mathbb{R}_+{}^2$ 上の力学系を pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path のくりこみ群と呼ぶ．

くりこみ群の大局的な軌道解析と canonical surface. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+{}^2$ に対して，$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}, \mathbf{x}_n = \mathbf{X}_n(x)$, $n = 1,2,3,\cdots$, とおくと，命題 2 のくりこみ群は $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_n)$, $n = 0,1,2,\cdots$, を意味する．$\mathbb{R}_+{}^2$ 上の点列 $\{\mathbf{x}_n\}$ を図示すると，図 1 のように初期値 $\mathbf{x}$ によってその振る舞いが変わる．また，$\mathbf{\Phi}$ の固定点 $\mathbf{x}_c$ の近くでの軌道の振る舞いが対応する確率連鎖の漸近的性質を定める．

次に，母関数が $(s_{(1)}, s_{(2)})$ という，単位三角形の通り方に依存する細かい情報に対応している点に注意する．Path の漸近的性質という観点からは，到達距離 2^n の時点での歩数 L の分布が興味の対象であって，$(s_{(1)}, s_{(2)})$ という細かい情報はいらない．即ち，興味の対象は，$\displaystyle\sum_{w \in \Omega_I^{(n)}} z^{L(w)}$, $I \in \{(1),(2)\}$, である．(1) と (2) によって変形すると，$\displaystyle\sum_{w \in \Omega_I^{(n)}} z^{L(w)} = X_{n,I}(z, z^2)$，即ち，パラメータ空間 $\mathbb{R}_+{}^2$ の中で $\{(x, x^2) \mid x \geqq 0\}$, で表される部分集合，言い換えると，曲線 $y = x^2$ の上での $X_{n,I}$ の振る舞いが path の漸近的振る舞いを決める．重要なことは，$X_{n,I}$ の漸近的性質を決

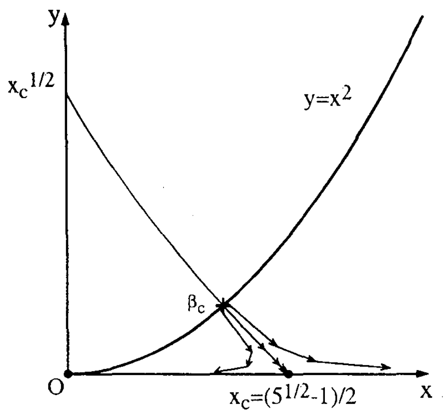


図 1:

める $\mathbf{\Phi}$ の固定点 $\mathbf{x}_c$ と，path の漸近的性質を決める曲線 $y=x^2$ が離れている点である（図 1）．このため， path の性質をくりこみ群から引き出すためには，曲線 $y=x^2$ から出発して $\mathbf{x}_c$ の近傍に向かうくりこみ群の軌道を追いかける必要がある．

一般にくりこみ群が作用するパラメータ空間は，漸化式が閉じるように選ぶので，元の問題にとって必要なパラメータ空間よりも大きくなる．パラメータ空間の中で元の問題にとって必要な部分集合をくりこみ群の理論の用語では canonical surface と言う．ここでの例では曲線 $y=x^2$ がパラメータ空間 $\mathbb{R}_+{}^2$ の中の canonical surface である．また， 固定点に収束する軌道上の点からなる集合を critical surface，canonical surface と critical surface の交点を critical point （臨界点）と言う．Canonical surface から固定点近傍までの軌道の大局的解析（固定点から離れた点から固定点の付近まで軌道を追いかける作業）は一般には容易ではない．写像によってはカオスなどの激しい振る舞いをする場合があるので，くりこみ群という特別な範疇の力学系ではそのようなことが起きないことをきちんと言わなければならない．

Pre-d 次元 gasket 上の self-avoiding path のくりこみ群． 以上の定式化を一般次元の dSG に拡張する．紙数の関係で具体的な定義は [1] を参照していただくこととして，ここでは手順の概要だけにとどめる．

まず self-avoiding path の一つの単位 d 次元単体との交わり方を分類する．$d \geqq 3$ では pre-Sierpiński gasket と違って一度通り抜けた単位単体に再度入り込むことができる．例えば path が単位単体内でまず 3 歩進み単体の外に出て何歩か動いた後この単体に戻ってきて 1 歩いて外に出て二度と戻らなかったならばこの path と単位単体の交わりを添字 $(1,3,0,\cdots,0)$ で表す．同様に，起こりうる全ての場合を考えて，対応する添字の集合を $\mathcal{I}_d$ とおく．くりこみ群の作用するパラメータ空間は $\mathbb{R}^{\mathcal{I}_d}$ となる．

くりこみ群が閉じるように，各スケール $n \in \mathbb{Z}_+$ と各添字 $I \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}_d}$ 毎に，F_n 上の self-avoiding path の集合 $\Omega_I^{(n)}$ を用意する．Path または path の組 $w \in \Omega_I^{(n)}$ と添字 $J \in \mathcal{J}_d$ に対して，$s_J(w)$ を，F_n の単位単体で w との交わりが J 型のものの個数とする．

dSG 上の self-avoiding path のくりこみ群は path の組の集合の族 $(\Omega_I^{(n)},\ I \in \mathcal{I}_d)$ に関する $(s_J,\ J \in \mathcal{I}_d)$ の結合母関数，即ち，

$$X_{n,I}(\mathbf{x}) = \sum_{w\in\Omega_I^{(n)}} \prod_{J\in\mathcal{I}_d} x_J^{s_J(w)}, \quad \mathbf{x} = (x_J,\ J \in \mathcal{I}_d) \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d},\ n = 0,1,2,\cdots.$$

で定義される $\mathbf{X}_n = (X_{n,I},\ I \in \mathcal{I}_d):\ \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d} \to \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}$ の，スケール n に関する次の漸化式である．

命題 3 (dSG 上の self-avoiding path のくりこみ群) $\mathbf{X}_n = (X_{n,I},\ I \in \mathcal{I}_d),\ n = 0,1,2,\cdots,$ は $\mathbf{X}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, および $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{\Phi} \circ \mathbf{X}_n$ で定まる．ここで $\mathbf{\Phi} = \mathbf{X}_1$ とおいた．

証明は [1] にゆだねる．

Pre-Sierpiński gasket の場合に比べて一般の dSG について複雑な事情がもう 1 点ある．実際にくりこみ写像を調べてみると，$d = 3$ では $\mathbb{R}^{\mathcal{I}_d} \setminus \{O\}$ の中に複数の固定点がある [5]．そこで，一般に dSG では self-avoiding path の漸近的性質に関係のある固定点を選ぶ必要がある．結論は，次のように定義される Ξ_d が重要である．添字 $I = (i_1,\cdots,i_k) \in \mathcal{I}_d$ と $J = (j_1,\cdots,j_\ell) \in \mathcal{I}_d$ に対して $I \oplus J$ を $k+\ell$ 個の非負正数 $i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_\ell$ を非減少になるように並べ替えた列とし，$\Xi_d \subset {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ を

$$\Xi_d = \{\mathbf{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d} \mid I \oplus J \in \mathcal{I}_d \text{ なる全ての } I,J \in \mathcal{I}_d \text{ に対して } x_{I\oplus J} \leqq x_I x_J \text{ が成り立つ }\}$$

で定義する．Ξ_d は $\mathbf{\Phi}$ の不変部分集合である．(証明は [1] を参照．Self-avoiding 性を用いる．)

4 くりこみ群から self-avoiding path の漸近的性質へ．

くりこみ群を定義したので，順当に行けば次はくりこみ群解析を行うべきである．しかし，くりこみ群の解析は $d = 2,3$ では完成しているけれども d に関する一般論は未解決である．ここでは，くりこみ群解析の d に関する一般論は未解決課題として保留し，くりこみ群解析ができたとしてそこから dSG 上の self-avoiding path の漸近的性質を導くこと，を調べる．

くりこみ群解析を後回しにするためには，くりこみ群解析から得られる結果について仮定を置く必要がある．仮定は，漸近的性質を導くのに十分な強さであって，かつ，dSG 上の self-avoiding path のくりこみ群において成り立っていると確信できる程度に緩いものでなければいけない．以下で取り上げる仮定は $d = 2,3,(4)$ における具体的なくりこみ群解析に基づくものである．

固定点と臨界点． くりこみ群解析から得られるべき情報を定式化する．命題 3 の $\mathbf{\Phi}$ のヤコビ行列（微分写像）を $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_{IJ})$ とおく．即ち，$\mathcal{J}_{IJ}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial \Phi_I}{\partial x_J}(\mathbf{x})$.

$\mathbf{x}_c \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ が *self-avoiding* 固定点であるとは以下が成り立つことと定義する．

(FP1) $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_c) = \mathbf{x}_c$, 即ち，$\mathbf{x}_c$ は $\mathbf{\Phi}$ の固定点である．

(FP2) $\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)$ は対角化可能である．その固有値のうち絶対値が最大のものは一つだけ（単根）であり，それを λ とおくとき，λ は実数で $\lambda > 1$ を満たし，他の全ての固有値は絶対値が 1 未満である．λ に対応する $\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)$ の左固有ベクトルを $\mathbf{v}_L = (v_{L,I},\ I \in \mathcal{I}_d)$ とおくとき $v_{L,J} > 0$, $J \in \mathcal{I}_d$．同様に，λ に対応する $\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)$ の右固有ベクトルを $\mathbf{v}_R$ とおくとき $v_{R,(1)} > 0$．

(FP3) $x_{c,I} \neq 0$ であるような全ての $I \in \mathcal{I}_d$ に対して，多項式 Φ_I の項 $\prod_{J \in \mathcal{I}_d} {x_J}^{m_J}$ $(m \in \mathbb{Z}_+^{\mathcal{I}_d})$ のうちで，$x_{c,J} = 0$ なる x_J を含まず（即ち $m_J = 0$ であって）$x_{(1)}$ を含む（即ち $m_{(1)} > 0$ となる）ものが存在する．

(FP4) $\mathbf{x}_c \in \Xi_d \setminus \{0\}$,

(FP2) の固有値の大きさに関する仮定は，スケーリング仮説に対応する．力学系として固定点の近傍で一つの方向だけ不安定 (relevant) で，あとの方向は安定で従って漸近的性質に効かない (irrelevant) という状況にモデルがなっている，という仮定である．おおざっぱに言うと不安定な方向はスケール変換の方向であり，総歩数 L に対応する変数 β の方向がほぼ不安定な方向ということになる．

Self-avoiding path に特徴的な仮定は (FP4) である．実際，$d = 3, 4$ では ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ に複数の固定点があることが分かっている．このうち self-avoiding path の漸近的性質に関係するのは Ξ_d に入っているものであることは Ξ_d が不変部分集合であることと canonical curve が Ξ_d に含まれることから分かる．

臨界点 β_c を定義するために，canonical curve (canonical surface) を定義する．$\beta \in \mathbb{R}$ に対して $\mathbf{x}_{can}(\beta) = (x_{can,I}(\beta),\ I \in \mathcal{I}_d)$ を $x_{can,I}(\beta) = e^{-\beta|I|}$ で定義する．ここで $|I|$ は path が単位単体と I 型で交わるときの単位単体内の path の総歩数である．$\mathbf{x}_{can}$ はパラメータ空間 $\mathbb{R}^{\mathcal{I}_d}$ の中の曲線を表している．これを canonical curve と呼ぶ．

臨界点 β_c を次のように定義する．

(CS1) $\beta_c \in \mathbb{R}$ が臨界点であるとは，$\lim_{n\to\infty} \mathbf{X}_n(\mathbf{x}_{can}(\beta_c)) = \mathbf{x}_c$ を満たす self-avoiding 固定点 $\mathbf{x}_c$ が存在することを言う．即ち，canonical curve 上の点であって，それを初期値とするくりこみ群の軌道が self-avoiding 固定点に収束するものを臨界点という．

漸近的性質． 以上で定式化した dSG 上の self-avoiding path のくりこみ群に対する仮定から，path の漸近的性質に関して証明できるいくつかの主な結果を以下に要約する．証明は [1] の補遺を参照されたい．

$\Omega_I^{(n)}$ は端点を固定した（全長 L は決まっていない）path 集合であった．最初の目標に従って，全長を固定した path に関する結果に翻訳する．原点 O を始点とする self-avoiding path の集合を $\Omega^{(0)}$ とおく．即ち，$\Omega^{(0)} = \{w \in \Omega_0 \mid w(0) = O\}$．$k \in \mathbb{Z}_+$ に対して $N(k) = \sharp\{w \in \Omega^{(0)} \mid L(w) = k\}$ を O を始点とする長さ k の self-avoiding path の本数とする．

定理 4 ([7, 8]) 臨界点 $\beta_c \in \mathbb{R}$ が存在するならば,

$$C_1 k^{C_3} e^{\beta_c k} \leqq N(k) \leqq C_2 k^{C_4} e^{\beta_c k}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots,$$

が成り立つような（k によらない）正定数 C_1, C_2 と実定数 C_3, C_4 が存在する.

この定理は $N(k) \fallingdotseq e^{\beta_c k}$, すなわち, dSG 上の self-avoiding path の connective 定数が e^{β_c} であることを意味する.

自然数 k に対して, $\tilde{P}_k$ を $\Omega^{(0)}$ 上の一様分布とし, $\tilde{P}_k$ に関する期待値, 即ち path に関する単純平均を E_k とおく.

定理 5 ([7, 8]) 臨界点 $\beta_c \in \mathbb{R}$ が存在するならば, 対応する固定点に対する *(FP2)* の λ を用いて $\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$ とおくとき,

$$s \log k - s\alpha \log\log k + C \leqq \log \mathrm{E}_k[\, |w(k)|^{s/\nu}\,] \leqq s \log k + s\alpha \log\log k + C', \quad k \geqq k_0, \ s \geqq 0,$$

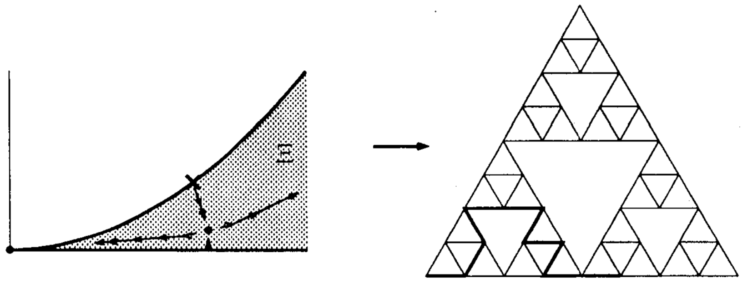
となる実定数 $\alpha,\ k_0,\ C,\ C'$ が存在する. ここで $|\cdot|$ は dSG が埋め込まれている $\mathbb{R}^d$ のユークリッド距離.

この定理は, 最初の目標どおり, 上で定式化したくりこみ群に対する仮定の下で, 変位の指数 ($|w(k)| \fallingdotseq k^{\nu}$ なる ν) の存在を示す.

定理 4 や定理 5 の証明は長いので, 途中の詳しい説明と共に [1] にゆだねる. 基本的には, 臨界軌道の近くのくりこみ群の軌道が, 歩数分布の母関数の漸近的振る舞いを与えることから, タウバー型の評価によって歩数分布の漸近的性質が決まる. さらに大偏差原理的な考え方（平均的な振る舞いから遠く離れた path は期待値に影響しない）によって, 歩数を固定したときの到達点の分布に翻訳できる.

くりこみ群の考え方に慣れている読者にとっては定理 4 や定理 5 の主張は自然なものである. 重要なのは, 数学的に厳密なくりこみ群の軌道解析の定式化に基づいて, path の漸近的性質という結果を dSG 上の self-avoiding path に関して d について統一的に数学的に証明できる点である. これまで物理的な描像に助けられながら語られてきた「力学系としてのくりこみ群が確率的（統計力学的）な物理現象の漸近的性質の情報を持っている」（図 2）という指導原理を数学的な概念として定式化する具体的な手がかりとなることが期待できる.

この節の定理の仮定は, (FP1)–(FP4) を満たす固定点 $\mathbf{x}_c$ と λ および (CS1) を満たす臨界点 β_c が存在することである. dSG 上の self-avoiding path についてこの節の定理の結論が成り立つためには, それぞれの d について固定点と臨界点が存在することを証明する必要がある. $d = 2, 3$ についてはそれぞれ [4, 5] によって固定点と臨界点の存在が証明されているので, この節の定理の結果が全て成り立つ. $d = 4$ の場合は self-avoiding path を, 漸近的性質にとって本質的と考えられる部分集合に制限したモデルについて同様の結果が全て成り立つ [7]. $d = 4$ の本来のモデルと $d \geqq 5$ は未解決であるが, 以上の $d \leqq 4$ までの結論に基づいて, 次を予想する.



$|w(k)| \fallingdotseq k^{\gamma} \qquad \gamma = \frac{\log 2}{\log \lambda}$

図 2:

予想 6 全ての $d = 2, 3, 4, \cdots$ に対して dSG 上の *self-avoiding path* のくりこみ群は *self-avoiding* 固定点と臨界点を持つ．従って，定理 *4* および定理 *5* の結論，たとえば変位の指数の存在，が成り立つ．

参考文献

[1] 服部哲弥，ランダム・ウォークとくりこみ群 — 一つの数理物理学入門 —，共立出版（シリーズ「解析学の新しい流れ」），2004.3 刊行予定.

[2] K. Hattori, T. Hattori, *Self-avoiding process on the Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **88** (1991) 405–428.

[3] K. Hattori, T. Hattori, *Mean square displacement of self-repelling walks on the pre-Sierpiński gasket,* preprint (2003).

[4] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the pre-Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **84** (1990) 1–26.

[5] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the three dimensional Sierpiński gasket,* Publications of RIMS **29** (1993) 455–509.

[6] T. Hattori, S. Kusuoka, *The exponent for mean square displacement of self-avoiding random walk on Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **93** (1992) 273–284.

[7] T. Hattori, T. Tsuda, *Renormalization group analysis of the self-avoiding paths on the d-dimensional Sierpiński gaskets,* Journal of Statistical Physics **109** (2002) 39–66.

[8] T. Hattori, T. Tsuda, *Renormalization group analysis of the self-avoiding paths on the d-dimensional Sierpiński gaskets,* MP-ARC preprint archive (2002) **02–225**, `http://www.ma.utexas.edu/mp\_arc/`.